

Analiza zespolona
Lista 8

Zad 1 (Lemat Jordana). Niech funkcja f będzie taka, że wielkość

$$M(R) = \max_{z \in \Gamma(R)} |f(z)|$$

dąży do zera, gdy $R \rightarrow \infty$. Wykazać, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma(R)} f(z) e^{i\varepsilon z} dz = 0.$$

Zad 2. Sformułować i wykazać wersję Zadania 1, która miałaby zastosowanie na dolnej półpłaszczyźnie.

Zad 3. Znaleźć jawną postać funkcji $\varphi(t)$ zmiennej rzeczywistej danej wzorem

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{1+x^2} dx.$$

Zad 4. Niech $a, b > 0$. Obliczyć całki

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^2 + b^2} dx, & \text{b)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin ax}{x^2 + b^2} dx, & \text{c)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(1+x^2)^4} dx, \\ \text{d)} \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^2 + b^2} dx, & \text{e)} \int_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{x^2 + b^2} dx, & \text{f)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x+i)^4} dx. \end{array}$$

Zad 5. Funkcję *sinus całkowy* określa się wzorem

$$\text{si } x = - \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

Obliczyć wartość tejże funkcji w zerze.